

Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2017, etapa online
Clasa a XI-a, Secțiunea Științele Naturii, Economic și Tehnic

(10pt) **1.** Se consideră funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x - [x]}{2x - [x] + 1}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x . Dacă S este suma punctelor de discontinuitate ale funcției f , atunci S are valoarea:

- | | | |
|--|------|-------|
| <input checked="" type="checkbox"/> a) 3 | b) 0 | c) -3 |
| d) 1 | e) 2 | f) -2 |
| g) nu știu | | |

(10pt) **2.** Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

a) 1	b) 0	<input checked="" type="checkbox"/> c) 0	d) nu există
e) 2	f) 3	g) nu știu	

(10pt) **3.** Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, considerăm matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fie $d = \det[A(1) + A(\frac{1}{2}) + A(\frac{1}{3}) + \dots + A(\frac{1}{n})]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

- | | | | |
|--|----------------------|------------|------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> a) $d = n^3$ | b) $d = n$ | c) $d = 1$ | d) $d = \frac{1}{n^3}$ |
| e) $d = 0$ | f) $m = \frac{1}{n}$ | g) nu știu | |

(10pt) **4.** Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinați parametrii reali a și b pentru care are loc relația $A^3 + aA^2 + bA = O_3$.

- | | | | |
|--|--------------------|-------------------|-------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> a) $a = -3, b = 2$ | b) $a = 3, b = 2$ | c) $a = 2, b = 3$ | d) $a = 2, b = 2$ |
| e) $a = 2, b = -3$ | f) $a = 3, b = -2$ | g) nu știu | |

(10pt) **5.** Dacă

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

atunci valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care

$$\frac{\det(A^n)}{8068} = \frac{2}{2017}$$

este:

- a) $n = 1$ b) $n = 2$ c) $n = 3$ d) $n = 4$
e) $n = 5$ f) $n = 6$ g) nu ştiu

(10pt) **6.** Se consideră matricile

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluţia ecuaţiei $AXB = C$ are determinantul egal cu:

- a) 0 b) $\sqrt{1-x}$ c) ∞ d) $x\sqrt{1-x}$
e) $\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}$ f) limita nu există g) nu ştiu

(10pt) **7.** Fie funcţia $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0, 1] \\ \frac{a \sin(x-1)}{x^2-3x+2}, & x \in (1, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Valoarea parametrului real a pentru care funcţia f este continuă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ este:

- a) 0 b) 2 c) 1 d) 3
e) $\frac{1}{2}$ f) $a = -1$ g) nu ştiu

(10pt) **8.** În reperul cartesian canonic xOy se consideră punctele $A(2, 3), B(2m + 1, 2)$ şi $C(3, 2m + 2)$, $m \in \mathbb{R}$. Care este valoarea parametrului m pentru care aria triunghiului ABC este minimă?

- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) -3 d) 0
e) 2 f) -2 g) nu ştiu

(10pt) **9.** Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $M = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Valoarea determinantului matricei M este:

- a) $4(2^n - 1)^2$ b) $(2^{2n} - 1)^2$ c) $4^n - 2^n$ d) $2(2^n - 1)^2$
e) 4^n f) $(2^n - 1)^2$ g) nu ştiu

(10pt) **10.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $|f(x) - x \sin x| \leq |x|^3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ este:

- a) 1 b) 0 c) -3 d) $-\infty$
e) 2 f) -2 g) nu ştiu

(10pt) **11.** Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Determinaţi parametrii reali a şi b ştiind că dreapta $y = x + 1$ este asimptota oblică la ramura spre ∞ a graficului funcţiei f .

- a) $a = -1, b = 1$ b) $a = 1, b = 1$ c) $a = 1, b = -1$ d) $a = 2, b = 1$
e) $a = 2, b = 2$ f) $a = 1, b = 0$ g) nu ştiu

(10pt) **12.** Să se determine parametrul real şi pozitiv a pentru care funcţia $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{2}(x - 2017))}{2x - 4034}, & 0 < x < 2017 \\ \frac{1}{3a + 5(\sqrt{x} - \sqrt{2017})}, & x \geq 2017 \end{cases}$$

are limită în $x_0 = 2017$.

a) $a = 2017$

b) $a = 1$

c) $a = 0$

(d) $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$

e) $a = \frac{1}{3}$

f) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

g) nu ştiu