

Concursul Național de Matematică Valeriu Alaci

Ediția a III-a, 2017, Faza Finală

Clasa a XI-a, Secțiunea Științele Naturii, Tehnic, Economic

(10pt) **1.** Se consideră determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab} \\ \overline{cab} & \overline{abc} & \overline{bca} \\ \overline{bca} & \overline{cab} & \overline{abc} \end{vmatrix},$$

unde \overline{xyz} reprezintă scrierea în baza 10 a unui număr natural de trei cifre. Valoarea lui Δ este:

- a) $\Delta = 999\overline{abc}$ b) $\Delta = \overline{abc}$ c) $\Delta = 998001(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$
 d) $\Delta = 998001(a + b + c)^3$ e) $\Delta = 0$ f) $\Delta = 999(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab})$

(10pt) **2.** Ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$ este:

- a) $y = 0$ b) $y = \frac{1}{2}$ c) $y = 2x - \frac{1}{2}$ d) $y = -2x - \frac{1}{2}$
 e) $y = -2x + \frac{1}{2}$ f) $y = 2x + \frac{1}{2}$

(10pt) **3.** Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiție al funcției f . Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$ și în caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

- a) f nu este derivabilă b) f este derivabilă și $f'(0) = 1$
 c) f este derivabilă și $f'(0) = -1$ d) f este derivabilă și $f'(0) = 0$
 e) f este derivabilă și $f'(0) = 2$ f) f este derivabilă și $f'(0) = \frac{1}{2}$

(10pt) **4.** Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Să se calculeze suma elementelor matricei

$$B = A - A^2 + A^3 + A^4 - A^5 + A^6 + \cdots + A^{2014} - A^{2015} + A^{2016}.$$

- a) 2017 b) 0 c) 1 d) -1
 e) 2016 f) -2016

(10pt) **5.** Fie funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Determinați domeniul maxim de definiție D și domeniul de derivabilitate D' pentru funcția f .

- a) $D = D' = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- b) $D = \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$
 $D' = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- c) $D = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$
- d) $D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$
 $D' = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- f) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(10pt) **6.** Câte puncte de extrem local are funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg \frac{1}{x^2 - 1}$?

- a) 2 b) 0 c) 1 d) 3
e) 4 f) 5

(10pt) **7.** Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu laturile $a = BC, b = AC, c = AB$ și sistemul

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}.$$

Notăm cu (x_0, y_0, z_0) soluția sistemului de mai sus. Care este multimea tuturor valorilor pe care le poate lua z_0 ?

(10pt) **8.** Fie matricea $A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & 0 & i \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Determinați toate numerele reale x pentru care $[A(x)]^{2017} = I_3$.

(10pt) **9.** Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right)$. Determinați $f^{(4)}(0)$, unde $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$ reprezintă derivata de ordinul n a funcției f în punctul x .

(10pt) **10.** Să se determine valoarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \right) \sqrt[3]{x^2}.$$

(10pt) **11.** Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 3^x + a^x - 9$, unde $a \in (0, \infty)$.

(5 pt) a) Determinați a astfel încât $f(x) \geq -6$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(5 pt) b) Care dintre numerele $u = 2^{\sqrt{3}} + 3^{\sqrt{3}} + 4^{\sqrt{3}}$ și $v = 29$ este mai mare?

(10pt) **12.** Se consideră matricea $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(4 pt) a) Calculați suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A^{2017} .

(6 pt) b) Calculați suma tuturor elementelor matricei $B = \sum_{k=1}^{2017} A^k$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorrect zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu știu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final (rezultatele finale). Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.