Concursul Naţional de Matematică "Valeriu Alaci" - 2017, etapa finală
Clasa a X-a, Secţiunea Ştiinţele Naturii, Tehnologic, Economic

(10pt) **1.** Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\log_3 x$ şi proprietăţile:

i) $f(9)=18$ ii) $f(e)<f(\pi)$ iii) f este crescătoare

iv) $f(3^n)=3^{n+1}$ v) $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)\le 0,\ \forall x>0$ vi) $3^{f(x)}=x^x$.

Câte din proprietăţile date sunt adevărate?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

(10pt) **2.** Fie $A=[-1,2017]\cap\mathbb{Z}$ şi mulţimea $M=\{(x,y)\in A\times A : |\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}\ i|=\sqrt{3}\}$. Determinaţi valoarea sumei

$$S=\sum_{(x,y)\in M}(|x|+|y|)\ .$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 8 f) 10

(10pt) **3.** Pornind din punctul A de coordonate $(6,-1)$, un robot notat R se îndepărtează cu viteză constantă de acesta, echidistant faţă de dreapta $d: x+2y+2=0$, traversând primul cadran. Calculaţi distanţa parcursă de R între cele două axe de coordonate.

a) $\dfrac{9}{2}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 4 d) $\dfrac{\sqrt{89}}{2}$ e) $3\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{6}$

(10pt) **4.** Un punct P se roteşte în sens trigonometric pe un cerc cu centrul în origine, pornind din poziţia $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Dacă (a,b) sunt coordonatele sale după o rotire cu 90°, calculaţi $\log_4\left|\dfrac{a}{b}\right|$.

a) $-\dfrac{3}{4}$ b) $2-\log_2 3$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\log_2 3-2$ e) $\log_4 3$ f) $\log_2 3$

(10pt) **5.** Se consideră funcţia surjectivă $f:[0,2017)\to[m,M]$, $f(x)=(a+\{x\})(a+1-\{x\})$, unde $a\in(0,\infty)$, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x. Determinaţi a pentru care $M=4$.

a) $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) 2 f) 4

(10pt) **6.** Determinaţi toate valorile lui $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\log_{\frac{a-1}{a+1}}(x^2+3)\ge 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

a) $a\in(-\infty,-1)$ b) $a\in[-2,\infty)$ c) $a\in[-2,-1)$ d) $a\in(-\infty,-2]$
e) $a\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ f) $a\in(-\infty,-2]\cup(1,\infty)$

(10pt) **7.** Determinaţi cel mai mic număr x de forma $3n$, $n\in\mathbb{N}^*$, ce verifică inegalitatea

$$5^{\log_{13}x}+12^{\log_{13}x}<x.$$

(10pt) **8.** Fie $x\in\mathbb{R}$ şi $z=\dfrac{1}{2^x}+i\sin x$. Aflaţi cardinalul mulţimii A, unde

$$A=\{x\in[0,3\pi] : z^2 \text{ este pur imaginar}\}.$$

(10pt) **9.** Fie mulţimea $A=\{z\in\mathbb{C}\mid z=x-1+ix,\ x\in\mathbb{R}\}$. Calculaţi $(1+i)v$, unde $v\in A$ astfel încât $|v|\le|w|$, pentru orice $w\in A$.

10. În planul xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(4,0)$ şi punctul $C(a,b)$ situat pe segmentul $[AB]$ astfel încât $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AB}{AC} = k$.

(3p) a) Calculaţi $k^2 - k$.

(7p) b) Dacă $a - b = m\sqrt{5} + n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, găsiţi valoarea lui $m - n$.

11. Fie funcţia $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3 - 2\cos x}{\sin x}$.

(3p) a) Dacă x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $f(x) = 3\sin x$, calculaţi $3 \cdot \sin(x_1 + x_2)$.

(7p) b) Precizaţi valoarea lui m, dacă $\sqrt{m}$ este minimul funcţiei f.

12. Fie numerele complexe $z = \dfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ şi $\omega = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$.

(3p) a) Determinaţi $\mathrm{Im}(4\omega^{2017})$.

(7p) b) Calculaţi $\displaystyle\sum_{k=0}^{107} |z - \omega^k|^2$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.