Concursul de Matematică ”Valeriu Alaci” - 2018, etapa online
Clasa a IX-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Două numere naturale au suma 123. Care este valoarea maximă a produsului lor?

a) 0 b) 123 c) 242 d) $\boxed{3782}$ e) $\dfrac{123^2}{4}$ f) alt răspuns

(10pt) **2.** Determinaţi suma numerelor întregi n pentru care:

$$\frac{[2^{n+1}]+[2^{n+2}]+[2^{n+3}]+[2^{n+4}]+[2^{n+5}]}{[2^{n+1}]+[2^{n+2}]+[2^{n+3}]} \in \mathbb{N}.$$

a) $\boxed{-5}$ b) -3 c) -2 d) -1 e) 3 f) 5

(10pt) **3.** Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relaţiile $f(11)=22$ şi $f(x+y)=f(x\cdot y)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$. Aflaţi $f(33)$.

a) 0 b) 11 c) $\boxed{22}$ d) 33 e) 44 f) 2018

(10pt) **4.** Fie $p,q\in\mathbb{N}^*$, $p\neq q$. Determinaţi raţia unei progresii aritmetice în care primul termen este 3, iar raportul dintre suma primilor p termeni şi suma primilor q termeni este $\frac{p^2}{q^2}$.

a) 3 b) 4 c) 5 d) $\boxed{6}$ e) 8 f) 9

(10pt) **5.** Fie ABC un triunghi dreptunghic în care lungimea ipotenuzei $[BC]$ este egală cu 2018. Punctele P_1, P_2, ..., P_{2018} împart ipotenuza în 2019 segmente congruente. Atunci modulul vectorului

$$\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_2}+\ldots+\overrightarrow{AP_{2018}}$$

este:

a) $1009\cdot 2017$ b) $\boxed{1009\cdot 2018}$ c) $2017\cdot 2018$ d) 2018^2 e) $2018\cdot 2019$ f) alt răspuns

(10p) **6.** Un colectionar are 3^n monede de 1 franc dintre care una este mai grea decat celelalte. Cu ajutorul unei balante incearca sa gaseasca moneda mai grea. Care este numarul minim de cantariri necesare pentru a detecta moneda mai grea?

a) 3^{n-1} b) $n-1$ c) $n+1$ d) $\boxed{n}$ e) $3n$ f) 3^{n-2}

(10p) **7.** Fie u,v,w vectori în plan astfel încât $u,v,w,u+v$ şi $u+v+w$ au toţi acelaşi modul nenul. Ştiind că $|u-v|>|u-w|$, aflaţi măsura unghiului dintre vectorii w şi $u-w$.

a) 30° b) 60° c) 90° d) $\boxed{120^\circ}$ e) 0° f) 180°

(10p) **8.** Un meci de fotbal se termină cu scorul de 4-3 pentru echipa gazdă. Ştiind că echipa gazdă a marcat prima şi a menţinut avantajul de cel puţin un gol până la finalul meciului, aflaţi în câte moduri a putut evolua scorul.

a) 3 b) 4 c) $\boxed{5}$ d) 6 e) 2 f) alt răspuns

(10p) **9.** Fie $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$ două progresii aritmetice şi $c_n = a_n \cdot b_n$, $\forall n \geq 1$. Dacă $c_1 = 20$, $c_2 = 29$, $c_3 = 42$, aflaţi c_8.

a) 134 b) $\boxed{167}$ c) 83 d) 2018 e) alt răspuns f) 145

(10p) **10.** Care este numărul maxim de numere consecutive de 3 cifre care au cel puţin o cifră impară?

a) 10 b) 100 c) $\boxed{111}$ d) 211 e) 221 f) alt răspuns

(10p) **11.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Notăm cu $f_n(x) = \left(\underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}\right)(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $f_n(1) = 4093$, atunci numărul n este egal cu:

a) $\boxed{10}$ b) 2045 c) 2018 d) 4036 e) alt răspuns f) 2047

(10p) **12.** Valoarea minimă a expresiei $E = x + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + x^4$ pentru $x \in (0, \infty)$ este:

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\boxed{4}$ e) nu există f) $\frac{201}{16}$