Concursul de Matematică ”Valeriu Alaci” - 2018, etapa finală
Clasa a IX-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Dacă $\{x\}$ este partea fracţionară a lui x, atunci suma pătratelor elementelor mulţimii $A = \left\{ \left\{n\sqrt{2} + \frac{n}{2}\right\} - \left\{n\sqrt{2}\right\} \ \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ este:

a) 0 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$ e) 1 f) $\frac{5}{4}$

(10pt) **2.** Să se determine suma elementelor mulţimii $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^3-3x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) -5 b) -4 c) -1 d) 0 e) 2 f) 5

(10pt) **3.** Pe unul dintre semicercurile delimitate de diamentrul AB al unui cerc de rază $r = 1$ se consideră punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ care împart semicercul în $n+1$ arce egale. Să se calculeze suma lungimilor segmentelor $[AA_1]$, $[AA_2], \ldots, [AA_n]$.

a) $\text{ctg}\frac{\pi}{2(n+1)} - 1$ b) $2\text{ctg}\frac{\pi}{4(n+1)}$ c) $\text{ctg}\frac{\pi}{4(n+1)} - 1$
d) $\text{ctg}\frac{\pi}{4(n+1)}$ e) $\text{ctg}\frac{\pi}{2(n+1)} + 1$ f) $\sqrt{2}\text{ctg}\frac{\pi}{4(n+1)} + 1$

(10pt) **4.** Pe o tablă este scris de 20 de ori numărul zecimal $1,1$ şi de 20 de ori numărul zecimal $1,11$. Andrei a şters câteva numere din cele 40 de pe tablă. Stabiliţi câte numere a şters Andrei, ştiind că suma numerelor rămase pe tablă este $19,93$.

a) 39 b) 38 c) 29 d) 22 e) 19 f) 18

(10pt) **5.** Fie $m, n, p \in \mathbb{N}$ astfel ca inegalitatea:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq m \cdot xy + n \cdot yz + p \cdot zx$$

să aibe loc pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$. Atunci:

a) $m + n + p = 3$ b) $m + n + p \leq 3$ c) $m = n = p$
d) $m, n, p \leq 1$ e) m, n, p sunt pare f) m, n, p distincte

(10pt) **6.** Fie punctele A, B, C astfel încât $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{CB}$ şi $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}| = 9$. Să se calculeze $|\overrightarrow{AB}|$.

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{25}{4}$ f) $\frac{27}{4}$

(10pt) **7.** Fie funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, care verifică relaţia $f(n)+f(n+1)+f(n+2) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Aflaţi valoarea lui $f(50)$.

(10pt) **8.** Pe o masă de biliard cu dimensiunile $2m \times 6m$, se lansează din mijlocul laturii mari o bilă, a cărei traiectorie rectilinie face un unghi de $45°$ cu latura. La a 2018-a ciocnire, cu mantele mesei de biliard, la câţi metri de punctul de plecare se află bila?

(10pt) **9.** Aflaţi valoarea sumei: $\frac{1}{\sin 45° \sin 46°} + \frac{1}{\sin 46° \sin 47°} + \ldots + \frac{1}{\sin 89° \sin 90°}$.

(10pt) **10.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisface relaţia $(f \circ f)(x) = 9x+1, \forall x \in \mathbb{R}$. Care este soluţia ecuaţiei $f(81f(x) + 10) = 820$?

(10pt) **11.** În triunghiul ABC considerăm punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = 2$, $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$. Fie $P \in (MN)$ astfel ca $\frac{MP}{PN} = \frac{1}{2}$. Dacă $AP \cap BC = \{Q\}$, aflaţi valoarea raportului $\frac{BQ}{QC}$.

12. (3pt) a) Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ aflaţi toate valorile posibile ale expresiei $[x + y] - [x] - [y]$.

(7pt) b) Aflaţi valoarea sumei $\sum\limits_{k=1}^{2018} \left[\frac{1000 \cdot k}{2019}\right]$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.