Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2018, etapa finală
Clasa a IX-a, Secţiunea Ştiinţe ale Naturii/Tehnologic/Economic

(10pt) **1.** Fie ecuaţia $x^2 + |x| = mx(x+3), m \in \mathbb{R}$. Să se determine mulţimea M a tuturor valorilor parametrului m astfel încât această ecuaţie să aibă exact trei rădăcini reale diferite.

a) $M = \mathbb{R}$ b) $M = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ c) $M = \emptyset$
d) $M = (-\infty, 1]$ e) $M = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ f) $M = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(10pt) **2.** Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) $S = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b) $S = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} \left[k, k + \frac{1}{k}\right]$ c) $S = \{n^2, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\}$
d) $S = \{1\}$ e) $S = [0, 1]$ f) $S = (0, 1)$

(10pt) **3.** Dacă $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică şi $b_1 + b_2 + \ldots + b_{2017} = 2$, $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_{2017}} = 1$ atunci produsul $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots b_{2017}$ este egal cu:

a) $\sqrt{2}^{2017}$ b) 2^{2017} c) 2^{2018} d) $\sqrt{2}^{2018}$ e) $2^{2017 \cdot 2018}$ f) $\sqrt{2}^{2019}$

(10pt) **4.** Fie punctele A, B, C astfel încât $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{CB}$ şi $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}| = 9$. Valoarea lui $|\overrightarrow{AB}|$ este:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{25}{4}$ f) $\frac{27}{4}$

(10pt) **5.** Pe o tablă este scris de 20 de ori numărul zecimal $1,1$ şi de 20 de ori numărul zecimal $1,11$. Andrei a şters câteva numere din cele 40 de pe tablă. Stabiliţi câte numere a şters Andrei, ştiind că suma numerelor rămase pe tabla este $19,93$.

a) 39 b) 38 c) 29 d) 22 e) 19 f) 18

(10pt) **6.** Fie M, N centrele de greutate ale ΔABC, respectiv ΔDEF. Dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{MN}$, atunci valoarea lui k este:

a) 3 b) 2 c) 1 f) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{3}$ d) -1

(10pt) **7.** Pe tablă este scris numărul 123456789. O operaţie înseamnă să alegem două cifre cărora să li se scadă câte o unitate şi să li se schimbe locurile, de exemplu $123\underline{45}6789 \to 123\underline{43}6789$. Care este cel mai mic număr care se poate obţine, din numărul scris pe tablă, ca rezultat al acestor operaţii (se fac mai multe asemenea operaţii continuând mereu cu numărul obţinut pe tablă)?

(10pt) **8.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia $f(x-1) - 2f(0) = 2x - 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Calculaţi suma: $S = \frac{1}{f(0)f(1)} + \frac{1}{f(1)f(2)} + \ldots + \frac{1}{f(2017)f(2018)}$.

(10pt) **9.** Pe o masă de biliard cu dimensiunile $2m \times 6m$, se lansează din mijlocul laturii mari o bilă a cărei traiectorie rectilinie face un unghi de $45°$ cu latura. La a 2018-a ciocnire, cu mantele mesei de biliard, la câti metri de punctul de plecare se află bila?

(10pt) **10.** Termenii unei progresii aritmetice 1,3,5, ..., se aşază într-un tablou astfel:

a_1

$a_2\ a_3$

$a_4\ a_5\ a_6$

$a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}$

. . . .

Dacă numărul 21715 se află pe linia m, atunci precizaţi valoarea lui m.

(10pt) **11.** Care este valoarea expresiei: $\sqrt{\sin^4\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} - \sqrt{\cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$?

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x - \sin x$. Stabiliţi care este
(5pt) a) valoarea minimă atinsă de f pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
(5pt) b) valoarea maximă atinsă de f pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.