Concursul de Matematică ”Valeriu Alaci” - 2018, etapa finală
Clasa a X-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10p) **1.** Conjugatul numărului complex $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + 2018i^{2017}$ este egal cu:

a) $-1009 + 1009i$ b) $1008 - 1010i$ c) $-1008 + 1010i$
d) $-1010 + 1009i$ e) $1010 - 1009i$ f) $1009 - 1010i$.

(10p) **2.** În care din următoarele cazuri funcţia $f : D \to C,\ f(x) = 2018^x + 2018^{-x}$ este bijectivă?

a) $D = \mathbb{R}, C = [0, \infty)$ b) $D = \mathbb{R}, C = (0, \infty)$ c) $D = (0, \infty), C = (0, \infty)$
d) $D = [0, \infty), C = [2, \infty)$ e) $D = [0, \infty), C = (0, \infty)$ f) $D = \mathbb{R}, C = [2, \infty)$

(10p) **3.** Să se calculeze $\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$.

a) $\dfrac{7\pi}{12}$ b) $-\dfrac{7\pi}{12}$ c) $-\dfrac{5\pi}{12}$ d) $\dfrac{3\pi}{4}$ e) $\dfrac{5\pi}{12}$ f) $-\dfrac{\pi}{12}$

(10p) **4.** Dacă numerele $2^a, x, 2^b, 2x$ sunt în progresie aritmetică în această ordine, atunci $b - a$ este egal cu:

a) 1 b) $\log_2 3$ c) 2 d) $\log_2 5$ e) $\log_2 6$ f) 3.

(10p) **5.** Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = 2$ şi $z_1 + z_2 = 1$. Să se calculeze $z_1 z_2$.

a) -4 b) 2 c) 1 d) 4 e) -2 f) -1

(10p) **6.** Câte numere întregi x verifică inegalitatea

$$\log_{\frac{x^2+x}{2}}(x+3) \le \log_{8-x}(8-x)\ ?$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

(10p) **7.** Să se stabilească numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2-8} = \sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt[3]{x^2-9}$.

(10p) **8.** Să se afle suma soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2018,\ x \in (0, 2\pi)$.

(10p) **9.** Să se determine numărul soluţiilor sistemului $\begin{cases} x^2 - y^2 = \log_2 \frac{y}{x} \\ 3^{x^2+y^2-1} - 4 \cdot 3^{xy} + 9 = 0 \end{cases}$.

10. Se consideră mulţimea $\mathcal{S} = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : |z - 4i| + |z - 3| = 5\}$.
(3p) a) Dacă $z = x + 2i \in \mathcal{S}$, să se calculeze $6x$.
(7p) b) Fie $z \in \mathcal{S}$. Dacă valoarea minimă pe care o poate lua $|z|$ este fracţia ireductibilă $\dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, să se precizeze valoarea lui p.

11. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2018x$, numărul întreg nenul a şi mulţimea de puncte

$$\mathcal{P} = \{A_n(x_n, x_{n+1}) : x_{n+1} = f(x_n), x_0 = a, n \in \mathbb{N}\}.$$

(3p) a) Să se determine valoarea lui a pentru care mulţimea $\mathcal{P}$ se reduce la un singur punct.
(7p) b) Să se afle numărul de valori ale lui a pentru care mulţimea $\mathcal{P}$ este formată din exact două puncte distincte.

12. Fie punctele necoliniare $O(0,0)$, $A(36,30)$, $B(a,b)$, $a, b \in [-40, 40] \cap \mathbb{Z}$.
(3p) a) Să se precizeze valoarea minimă pe care o poate lua aria triunghiului OAB.
(7p) b) Pentru câte perechi distincte (a,b) aria triunghiului OAB este egală cu 33?

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.