Concursul Naţional de Matematică "Valeriu Alaci" - 2018, etapa finală
Clasa a XI-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Folosind, eventual, limita $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y - y}{y^3} = -\frac{1}{6}$, să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{2016}\right)-\sin^{2016}(x)}{x^{2018}}.$$

a) 336 b) 2016 c) 1008 d) $\frac{2015}{6}$ e) $\frac{1009}{3}$ f) 672

(10pt) **2.** Câte funcţii injective $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ există astfel încât şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin

$$x_0 = f(0),\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k^2},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,$$

să fie convergent?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) o infinitate f) x_0+4

(10pt) **3.** Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=4$. Dacă determinantul $\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix} = 8$, atunci valoarea sumei $a+b+c$ este:

a) -4 b) 2 c) 0 d) 4 e) 12 f) -2

(10pt) **4.** Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\prod\limits_{k=1}^{2018}(1+\arcsin(kx))}{\sin x + 2\sin(2\,x)+\cdots+2018\sin(2018\,x)}.$$

a) 0 b) $\frac{1}{2018}$ c) $\frac{1}{2019}$ d) $\frac{3}{4037}$ e) $+\infty$ f) $\frac{1}{1009}$

(10pt) **5.** Să se determine produsul soluţiilor ecuaţiei $E(x)=\frac{1}{8}$ din intervalul $[0,\pi]$, unde

$$E(x) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \sin(2x)\\ \cos^2 x & \sin^2 x & \sin(2x)\\ 1+\sin(2x) & -1 & 1\end{vmatrix}.$$

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi^2}{9}$ d) 0 e) $\frac{5\pi^2}{36}$ f) $\frac{\pi}{6}$

(10p) **6.** Fie $\omega = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ şi $A=\begin{pmatrix} 1 & \omega\\ \omega^2 & 1\end{pmatrix}$. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât

$$A + A^2 + \cdots + A^n = 15A.$$

a) 1 b) 15 c) 3 d) 4 e) 8 f) 2

(10p) **7.** Să se determine câte matrice $X \in M_2(\mathbb{Z})$ verifică ecuaţia $X^t \cdot X = 2018\, I_2$, unde X^t este transpusa matricei X, iar $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(10p) **8.** Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \sqrt[3]{4x_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Câţi termeni ai acestui şir sunt strict mai mici decât $2^{\frac{6560}{6561}}$?

(10p) **9.** Dacă f^{-1} este inversa funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$, să se calculeze $\lim\limits_{y \to -\infty} e^{-y} f^{-1}(y)$.

(10p) **10.** Să se determine numărul funcţiilor continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică $f(x) = f(2x+1)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $f(-1) = 2018$.

(10p) **11.** Se consideră şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $x_0 \in (0, 1)$ şi $x_{n+1} = x_n - nx_n^2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze:

a) (4 pt) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$;

b) (6 pt) $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 x_n$.

(10p) **12.** Se consideră ecuaţia matriceală $X^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (4 pt) Câte matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$ verifică ecuaţia dată?

b) (6 pt) Câte matrice $X \in M_2(\mathbb{C})$ verifică ecuaţia dată?

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele şase subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.
La ultimele şase subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final/rezultatele finale. Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.