Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2018, etapa finală
Clasa a XII-a, Secţiunea Matematică-Informatică

Varianta A

(10pt) **1.** Să se calculeze valoarea integralei $\int\limits_{2\pi/3}^{3\pi/4} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx$.

a) $\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ b) $\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}-1}{3}$ c) $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{24}$ d) $-\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ e) $\pi + \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ f) 2π

(10pt) **2.** Care dintre următoarele mulţimi este parte stabilă pentru legea de compoziţie $x \circ y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ definită pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

a) $(-\infty, -3)$; b) $(1, 2)$; c) $(2, \infty)$; d) $[2, \infty)$; e) $(0, 2)$; f) $(1, \infty)$.

(10pt) **3.** Fie $f = (X+1)^{2018} + X + a$ şi $g = X^2 + 3X + 3$. Să se calculeze valoarea parametrului a pentru care polinomul g este divizibil prin f.

a) $a = 0$ b) $a = 1$ *c)* $a = 2$ d) $a = i$ e) $a = -i$ f) $a = 1 + i$.

(10pt) **4.** Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} (n-2) \int_n^{n+1} \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

a) 1 b) 0 c) ∞ d) 2 e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{2}$.

(10pt) **5.** Pe mulţimea $(0, \infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = \frac{xy}{x+y}$, $x, y \in (0, \infty)$. Să se calculeze $1 \circ \frac{1}{2} \circ \frac{1}{4} \circ \frac{1}{8} \circ \cdots \circ \frac{1}{1024}$.

a) $\frac{256}{1023}$ b) $\frac{1}{255}$ c) $\frac{1024}{2047}$ d) $\frac{1}{2047}$ e) $\frac{2}{1023}$ f) $\frac{2}{255}$.

(10pt) **6.** Pe mulţimea numerelor întregi impare $2\mathbb{Z}+1$ se defineşte operaţia $x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1)$. Să se determine mulţimea tuturor elementelor inversabile ale monoidului $(2\mathbb{Z}+1, *)$.

a) $2\mathbb{Z}+1$ b) $\{-3, 1\}$ c) $2\mathbb{N}+1$ d) $\{-1, 3\}$ e) $\varnothing$ f) $\{-1, 1\}$.

(10pt) **7.** Fie funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le a, \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le b, \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad , \ a > b$$

respectiv

$$h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

(7pt) a) Să se găsească expresia analitică a funcţiei h pe intervalul $[a, a+b]$.

(3pt) b) Să se calculeze aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei h şi axa Ox.

(10pt) **8.** Fie funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$. Calculaţi:

(3pt) a) $\displaystyle\int_1^2 x f(x)\, dx$ şi

(7pt) b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln \frac{4n - 4 - 2a_n}{\pi}$, unde am notat $a_n = \displaystyle\int_1^n f(x)dx$.

(10pt) **9.** Se consideră grupurile $(G_1, \star)$ şi $(G_2, \circ)$ şi funcţia $f : G_1 \to G_2$ un izomorfism al acestora. Fie $a \in G_1$ şi $b \in G_2$ astfel încât $f(a) = b$. Dacă ordinul elementului a este 3, determinaţi ordinul elementului b.

(10pt) **10.** Mulţimea matricilor de forma $M(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix}$, $x \ne 0$, formează relativ la înmulţirea matricilor un grup izomorf cu grupul multiplicativ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. Dacă $M(2)^5 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, să se calculeze
$S = a + b + c + 2d$.

(10pt) **11.** Fie $\quad I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a)^n} dx$ cu $a > 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi $4034aI_{2018} - 4033I_{2017}$.

(10pt) **12.**

(4pt) a) Fie F o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$; calculaţi $F(\dfrac{\pi}{12}) - F(0)$.

(6pt) b) Fie $I(n) = \int_{-1}^{1} \cos^2(n \arccos x)dx$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $I(n) = \dfrac{254}{255}$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă 0 puncte. Bifarea răspunsului "Nu ştiu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.