Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2019, etapa finală
Clasa a XII-a, Secţiunea Matematică-Informatică

Varianta A

(10pt) **1.** Să se determine mulţimea A ce conţine toate elementele $a \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât polinomul $X^3 + aX + \hat{5}$ să fie ireductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

a) $A = \emptyset$; b) $A = \{\widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{4}, \widehat{6}\}$; c) $A = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{6}\}$; d) $A = \{\widehat{2}, \widehat{4}, \widehat{5}, \widehat{6}\}$; e) $A = \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{5}, \widehat{6}\}$; f) $A = \{\widehat{1}, \widehat{5}\}$.

(10pt) **2.** Determinaţi ordinul elementului $a = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ în grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

a) 20; b) 14; c) 18; d) 16; e) 22 f) 32.

(10pt) **3.** Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx, \quad a, b > 0\ .$$

a) $\frac{1}{a}\ln\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{ab}{a^2+b^2}$; b) $\frac{1}{2a}\ln\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{a+b}{a^2+b^2}$; c) $\frac{1}{a}\ln\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{a+b}{2a^2+b^2}$;
d) $\frac{1}{2a}\ln\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{ab}{2a^2+b^2}$; e) $\frac{1}{a}\ln\frac{4a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{ab}{a^2+b^2}$; f) $\frac{1}{2a}\ln\frac{4a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{a}\text{ arctg }\frac{ab}{2a^2+b^2}$.

(10pt) **4.** Fie $f : [0,1] \to (0, \infty)$ continuă astfel încât $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$. Dacă

$$K = \left(\int_0^1 \sqrt[3]{f(x)}dx\right)\left(\int_0^1 \sqrt[5]{f(x)}dx\right)\left(\int_0^1 \sqrt[7]{f(x)}dx\right), \quad \text{atunci}$$

a) $1 < K \leq 1 + \frac{1}{3\cdot5\cdot7}$; b) $K \leq 1$; c) $K = 3$; d) $K = (1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})$; e) $K = 15$; f) $K = 17$.

(10pt) **5.** Se consideră corpul $(K, +, \cdot)$, $K = \{M(z,u) = zI_2 + uA \mid z, u \in \mathbb{R}\}$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi izomorfismul de corpuri $f : (K, +, \cdot) \to (\mathbb{C}, +, \cdot)$ cu proprietatea $f(aM) = af(M)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall M \in K$. Să se determine modulul numărului complex $f(M(z,u))$.

a) $\sqrt{z^2 - 3u + 5u^2}$; b) $\sqrt{z^2 + 3u - 5u^2}$; c) $\sqrt{z^2 + u^2}$; d) $\sqrt{z^2 + 3u^2}$; e) $\sqrt{z^2 + 3uz + 5u^2}$;
f) $\sqrt{z^2 - 3uz + 5u^2}$.

(10pt) **6.** Fie $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{(1+x^5)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi relaţia între I_{2019} şi I_{2020}.

a) $I_{2019}(t) = 2020 I_{2020}(t) + \frac{t}{(1+t^5)^{2019}}$ b) $I_{2019}(t) = \frac{10095}{10094} I_{2020}(t) + \frac{t}{10094(1+t^4)^{2020}}$;
c) $I_{2020}(t) = 2019 I_{2019}(t) + \frac{t}{(1+t^5)^{2020}}$; d) $I_{2019}(t) = \frac{2020}{2019} I_{2020}(t) + \frac{t}{(1+t^5)^{2019}}$;

e) $I_{2020}(t) = \frac{10094}{10095} I_{2019}(t) + \frac{t}{100094(1+t^5)^{2020}}$; f) $I_{2020}(t) = \frac{10094}{10095} I_{2019}(t) + \frac{t}{10095(1+t^5)^{2019}}$.

(**a+b**) **7.** Pe mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definim legea de compoziţie

$$(f \star g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k) g(n-k) \ .$$

(4pt) **a)** Să se determine $h(n) = (f \star g)(n)$ pentru $f(n) = 3^n/n!$ şi $g(n) = (-2)^n/n!$.

(6pt) **b)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie.

(10pt) **8.** Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n} \cdot \frac{3n+2020}{3n+2019} \cdot \frac{3n+4039}{3n+4038} \cdots \frac{3n+2019n+1}{3n+2019n} \right) \ .$$

(10pt) **9.** Fie p, q, r rădăcinile polinomului $f(x) = x^3 - 22x^2 + 80x - 67$.
Dacă $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{A}{x-p} + \dfrac{B}{x-q} + \dfrac{C}{x-r}$, să se calculeze numărul $\dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{B} + \dfrac{1}{C}$.

(10pt) **10.** Ştiind că

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^8 + x^6} dx = 41a\sqrt{3} + b + 6c\pi$$

calculaţi $45a + 15b + 3c$.

(10pt) **11.** Calculaţi aria limitată de axa OX şi curbele de ecuaţii $y = \arcsin(x)$ şi $y = \arccos(x)$.

(**a+b**) **12.** Se consideră funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^{\text{arctg } x} e^{\text{tg}^2 t} dt.$$

(3pt) **a)** Să se determine domeniul maxim de definiţie I.

(7pt) **b)** Calculaţi

$$\int_0^1 \frac{x f(x)}{e^{x^2}} dx + \frac{1}{2e} \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2} dx \ .$$

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă 0 puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.