Concursul de Matematică "Valeriu Alaci" - 2019, etapa finală

Clasa a X-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Câte numere naturale conţine intervalul $A = [1008 + \log_2 2019, 2019 - \log_2 1008]$?

a) 900 b) 980 c) 990 d) 991 e) 1000 f) 1012

(10pt) **2.** Să se calculeze produsul tuturor valorilor reale ale lui a pentru care punctul $P(2^a, 4^a)$ aparţine dreptei de ecuaţie $y = 12x - 32$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 6

(10pt) **3.** Să se studieze dacă există triunghiuri de perimetru 14 ale căror laturi sunt $\log_2 2x$, $\log_4 4x$, respectiv $\log_8 8x$, unde $x \in (1, \infty)$. În caz afirmativ, să se precizeze valoarea lui x.

a) 8 b) 16 c) 32 d) 64 e) 128 f) *nu exista*

(10pt) **4.** Punctul $P(a, b)$, situat în interiorul primului cadran, aparţine cercului trigonometric, adică există $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel ca $a = \cos t$ şi $b = \sin t$. Dacă $a \cdot b = \frac{1}{4}$, să se calculeze suma tuturor valorilor lui t cu această proprietate.

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) π e) $\frac{3\pi}{2}$ f) 2π

(10pt) **5.** Numărul $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ are partea reală şi partea imaginară numere naturale. Câte astfel de numere z au proprietatea că $|z - 2019i| + |z + 2019i| = 4038$? $(i = \sqrt{-1})$

a) 0 b) 2019 c) 2020 d) 4038 e) 4039 f) *o infinitate*

(10p) **6.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{1009} \cos(2k - 1)x$. Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{2019}\right)$.

a) 0 b) 1 c) -1 d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{3}{2}$

(10p) **7.** Fie $i = \sqrt{-1}$. Dacă $3i^3 + 6i^6 + 9i^9 + 12i^{12} + \ldots + 2019i^{2019} = a + bi$, să se calculeze $a + b$.

(10p) **8.** Să se calculeze $\{\lg 1 + \lg 2^2 + \lg 3^3 + \ldots + \lg 9^9\} + \{\lg 1^{-1} + \lg 2^{-2} + \lg 3^{-3} + \ldots + \lg 9^{-9}\}$, unde s-a notat cu $\{x\}$ partea fracţionară a numărului real x.

(10p) **9.** Să se precizeze câte numere $a \in [0, 2019\pi]$ verifică ecuaţia $\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi - a)$.

10. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $a_1 = \sqrt[4]{2019}$, $a_{n+1} = \sqrt[4]{2019 + \sqrt[n+1]{a_n}}$, $\forall n \geq 1$.
(5p) a) Să se determine partea întreagă a numărului $a_2 - a_1$.
(5p) b) Să se calculeze $S = [a_1] + [a_2] + ... + [a_{2019}]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

11. Fie familia de drepte $d_m : (m + 6)x + (m + 1)y - 2m - 12 = 0, m \in \mathbb{Z}$.

(4p) a) Dacă $P(a, b)$ este punctul fix al familiei de drepte, să se calculeze $a + b$.
(6p) b) Să se determine pentru câte valori ale lui m are loc proprietatea: "$\forall k \in \mathbb{Z}, \exists l \in \mathbb{Z} : Q(k, l) \in d_m$".

12. Pătratele unei table de şah au latura de $1cm$ şi sunt delimitate de 9 segmente orizontale numite *linii* şi 9 segmente verticale numite *coloane*. Intersecţia liniei j cu coloana i formează *nodul* $N_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
(3p) a) Care este distanţa în centimetri dintre nodurile $N_{4,1}$ şi $N_{1,5}$?
(7p) b) Câte noduri se află la distanţa de $2cm$ de dreapta ce uneşte nodurile $N_{4,1}$ cu $N_{1,5}$?

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect se acordă zero puncte. Bifarea răspunsului "Nu ştiu" se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 3 ore.