Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2015

Test clasa a XI-a Secţiunea Mate-Info - faza de calificare

1. Să se determine toate matricile $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel ca $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

a)$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b)$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c)$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ d)$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
e)$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. Să se calculeze determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$.

a)$\Delta = 1 + a + b^2 + 3c$; b)$\Delta = 1 + a - b + 3c$; c)$\Delta = 1 + 3abc$;
d)$\Delta = 1 + a^2 + b^2 + c^2$; e)$\Delta = (1+a)^2 + b^2 + (a+c)^2$; f)$\Delta = 1 + a + b + c$.

3. Fie şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \{\sqrt{n^2+n}\}$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x. Dacă $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci

a) $L = \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $L = \frac{1}{3}$ c) $L = 1$ d) $L = \frac{1}{2}$ e) $L = \sqrt{2}$ f) $L = 0$.

4. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+3n+4}\right)\right)$.

a) $L = \frac{1}{2}$ b) $L = 1$ c) $L = 0$ d) $L = \frac{1}{4}$ e) $L = \frac{1}{3}$ f) $L = \frac{3}{4}$.

5. Fie matricile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } \Delta = det\left(A^{2015} + B^{2015}\right).$$

Atunci

a) $\Delta = 1$ b) $\Delta = 2^{2015}$ c) $\Delta = 4^{2015}$

d) $\Delta = 2^{2014}$ e) $\Delta = 2^{2016}$ f) $\Delta = 4^{2016}$.

6. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

şi $B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2}, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $P = \{a \in \mathbb{R} : B_n \text{ este inversabilă, } \forall n \in \mathbb{N}^*\}$. Atunci

a) $P = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ b) $P = \mathbb{R}$ c) $P \supseteq [-1, 1]$

d) $P = \emptyset$ e) $P = \{0, 1\}$ c) $P = \mathbb{R}^*$.

7. Fie mulţimea $\mathcal{H} = \left\{ A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q}) \,\middle|\, \det A \neq 0,\ A^{-1} = A^2 + A \right\}$. Dacă $A \in \mathcal{H}$ atunci:

a) $A^3 = I_3 - A^2$ şi $A^5 = I_3 - A$; b) $A^3 + A^2 = O_3$;
c) $A^5 = -A$ şi $A^3 = -I_3$; d) $A^3 = I_3 - A$ şi $A^5 = I_3 - A^2$;
e) $A^3 = A^5$; f) $A^5 = I_3 - A$ şi $A^3 = I_3$.

8. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, \forall n \geq 1$. Dacă $x_n \in (a, b), \forall n \geq 1$ atunci:

a) $a = 1, b = 4$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$; b) $a = 0, b = 4$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;
c) $a = 0, b = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; d) $a = 1, b = 2$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$;
e) $a = 0, b = 4$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$; f) $a = 2, b = 3$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$.

9. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + kx)\right)^{\frac{1}{x}}.$$

a) $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$ b) $e^{\frac{n}{2}}$ c) e^3 d) e^{2n} e) e^4 f) $e^{\frac{n}{3}}$

10. Să se calculeze limita şirului

$$x_n = \frac{\left[\sqrt{3}\right] + \left[2^2\sqrt{3}\right] + ... + \left[n^2\sqrt{3}\right]}{3n^3 + 1}.$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{18}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{4}$;
d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$; f) limita nu există.

11. Să se determine toate numerele naturale n pentru care limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^n}$$

este finită.

a) $n \in \{0, 1, 2, 3\}$; b) $n \in \{0, 1, 2\}$; c) $n \in \{0, 1\}$; d) $n = 1$; e) $n = 2$; f) $n = 3$.

12. Numărul punctelor de continuitate ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este:

a) 1; b) 2; c) ∞; d) 0; e) 3; f) 2015.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La fiecare subiect este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspuns corect se acordă 10 puncte, pentru lipsa unui răspuns se acordă 2 puncte, iar pentru un răspuns incorect zero puncte. Timp de lucru 2 ore.