Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2015, faza finală

Clasa a XI-a, Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Dacă se notează cu

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(\text{tg(x)}) - \sin(\sin(x))}{\text{tg(x)} - \sin(x)}, \text{ atunci}$$

a) L= 0 b) L= 1 c) L=∞ d) L= 2 e) L= -1 f) nu există

(10pt) **2.** Fie determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze Δ.

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; b) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$; c) $(a + b + c + d)^2$;
d) $\pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$; e) $-(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$; f) $-a^4(b^2 + c^2 + d^2)^2$.

(10pt) **3.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisface relaţia

$$|f(x) - \sin(x) - \cos(x)| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Atunci

a) f este continuă în $x = 0$ şi nu e derivabilă în $x = 0$; b) f este derivabilă în $x = 0$ şi $f'(0) = 0$;
c) f nu este continuă în $x = 0$; d) f este derivabilă în $x = 0$ şi $f'(0) = 1$;
e) f nu este continuă în $x = 0$ şi e derivabilă în $x = 0$; f) f nu este derivabilă în $x = 0$.

(10pt) **4.** Fie matricile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = (b_{ij})_{i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}}, \ B = A^{2005}.$$

Dacă

$$S = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ij}, \text{ atunci :}$$

a) $S = 3(2^{2004} - 1)$ b) $S = 3(2^{2005} - 1)$ c) $S = 3(2^{2006} - 1)$
d) $S = 4 \cdot 2^{2007} - 8017$ e) $S = 3 \cdot 2^{2005}$ f) $S = 2^{2007} + 8021$

(10pt) **5.** Dacă $\omega^4 = 1$ şi $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ atunci

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

este

a) ω b) 1 c) 0
d) 3 e) 2 f) $-\omega$

(10pt) **6.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă în $x = 0$, care verifică relaţia

$$\alpha f(\alpha x) = f(x) + \beta x,\ \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| > 1 \text{ şi } \beta \in \mathbb{R}.$$

Dacă

$$L = \lim_{x \to -\infty} \frac{(\alpha^2 - 1)f^2(x) + 2\beta x}{(x + \beta)^2}, \text{ atunci}$$

a) $L = \frac{\beta^2}{\alpha^2 - 1}$ b) $L = \alpha^2$ c) $L = \beta^2 \cdot (\alpha^2 - 1)$
d) $L = 0$ e) $L = 1$ f) $L = \alpha^2 - 1$

(10pt) **7.** Fie şirurile $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $a_k = k(a_{k-1} + 1), a_1 = 1$ şi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \ldots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Dacă notăm cu $L = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, atunci L este:

(10pt) **8.** Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $det(A) = a_{11} + a_{22} = 1$. Să se determine numărul de elemente al mulţimii $\{A^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

(10pt) **9.** Se consideră şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

$$x_{n+1} = x_n + 2^{-x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ şi } x_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{\ln(\mathrm{n})}$.

(10pt) **10.** Se consideră şirurile

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \text{ şi } (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, y_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}.$$

Să se calculeze: (a) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$; (b) $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

(10pt) **11.** Fie a şi b rădăcinile ecuaţiei $x^2 - px + 1 = 0, p \in \mathbb{R}$ şi matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & b & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze: (a) $\operatorname{rang}(A)$; (b) $\operatorname{rang}(A^{2015})$.

(10pt) **12.** Fie şirul dat prin $x_1 = \frac{1}{2}$ şi

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze: (a) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^{n \cdot x_n}$; (b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - n \right)$.

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un răspuns incorect zero puncte. Bifarea răspunsului ”Nu ştiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final(rezultatele finale). Pentru răspuns corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 2 ore.