Concursul de Matematică Valeriu Alaci - 2015, faza finală

Clasa a XII-a Secţiunea Matematică-Informatică

(10pt) **1.** Să se afle valoarea polinomului

$$P(x) = x^{15} - 15x^{14} + 15x^{13} - 15x^{12} + \cdots - 15x^2 + 15x - 1$$

pentru $x = 14$.

a) 14 b) 2015 c) 13 d) 1 e) 15 f) 0

(10pt) **2.** Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul

$$P(x) = \widehat{2}x^3 + (a + \widehat{2})x + \widehat{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$$

să fie ireductibil.

a) $a = \widehat{2}$ b) $a = \widehat{0}$
c) $a = \widehat{1}$ d) $a = \widehat{0}$ şi $a = \widehat{1}$
e) nu există f) toate răspunsurile sunt corecte

(10pt) **3.** Să se calculeze

$$i \circ i \circ i \circ i \circ i$$

în grupul $(\mathbb{C}, \circ)$ unde legea "$\circ$" este definită prin

$$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2.$$

a) $5 - 4i$ b) $5 + 4i$ c) $-5 - 4i$ d) $-5 + 4i$ e) i f) 1

(10pt) **4.** Să se determine numerele reale A, B şi C astfel încât

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = Af\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Bf(0) + Cf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

pentru orice funcţie polinomială reală de grad cel mult trei.

a) $A = B = C = \frac{2}{3}$ b) $A = B = \frac{1}{3},\ C = \frac{2}{3}$
c) $A = \frac{2}{3}, B = \frac{3}{2},\ C = \frac{1}{3}$ d) $A = \frac{2}{3},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{3}$
e) $A = \frac{7}{3},\ B = \frac{2}{3},\ C = \frac{3}{2}$ f) $A = C = \frac{5}{3},\ B = \frac{3}{2}$

(10pt) **5.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^{2x^2} e^{2t^2} \sin(t)dt.$$

Atunci valoarea lui L unde

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^4}$$

este

a) ∞ b) nu există c) 1 d) 2 e) π f) 0

(10pt) **6.** Valoarea integralei

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x) + \tan^3(x) + \tan^{2013}(x) + \tan^{2015}(x))dx$$

este

a) 1 b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{2013}{2015}$ d) $\frac{1008}{2015}$ e) $\frac{504}{1007}$ f) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2015}$

(10pt) **7.** Pentru ce valori ale lui $a, b \in \mathbb{R}$, rădăcinile ecuaţiei

$$x^4 - (a+b)x^3 + (ab+2)x^2 - (a+b)x + 1 = 0$$

au toate modulul egal cu 1?

(10pt) **8.** Fie f un polinom cu coeficienţi reali. Restul împărţirii lui f la $X^3 - 2$ este egal cu pătratul câtului. Să se afle câtul ştiind că $f(-2) + f(2) + 34 = 0$.

(10pt) **9.** Calculaţi valoarea integralei

$$I = \int_0^1 e^{\arcsin(x)} dx.$$

(10pt) **10.** Calculaţi limita şirului (a_n), unde

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(k \arctan\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{\pi n}{4}\right).$$

(10pt) **11.** Fie $f : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ o funcţie derivabilă, inversabilă cu $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ şi $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ inversa sa. Să se determine valoarea integralei

$$I = \int_a^b f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(y)dy.$$

(10pt) **12.** Determinaţi valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} \int_0^n \frac{1}{1 + x - [x]} dx.$$

Notă. Fiecare subiect este obligatoriu. La primele 6 subiecte este corectă o singură variantă de răspuns. Pentru răspunsul corect se acordă 10 puncte, pentru un raspuns incorect se acordă 0 puncte. Bifarea răspunsului ”Nu stiu” se cuantifică cu 2 puncte.

La ultimele 6 subiecte se completează pe grila de răspunsuri doar rezultatul final. Pentru răspunsul corect se acordă punctajul indicat, altfel zero puncte. Timp de lucru 2 ore.